Concours blanc type EM/EDHEC - Mathématiques approfondies

Samedi 15 Février 2025 : 4 heures

Le barême, fidèle aux épreuves du concours BCE sera sur une centaine de points, un savant produit en croix ramènera la note sur une trentaine de points, puis "tronquée" à 20/20. Ce qui veut dire en résumé que, comme c'est souvent le cas aux épreuves EM, EDHEC, ou ECRICOME, "gagner" les deux tiers des points possibles assure le saint graal du 20/20.

L'exercice 1 est le plus difficile ! Le tout, comme le veut la tradition aux concours, est trop long. Suite à la remarque précédente, prenez votre temps pour rédiger convenablement chaque question et ainsi vous assurer de "gagner" tous les points de chaque question traitée.

Pour faciliter la correction, merci de changer de copie double à chaque nouvel exercice, et numérotez vos pages svp !

Exercice 1 : ()

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de E.

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2, on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E. (C'est à dire une application de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$).
2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.
3. Quelle peut être la dimension de l'image de L ?
4. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.
5. Prouver qu'il existe une base $\mathcal{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.
6. Montrer que :
   a) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux.
   b) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.
7. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X\,.$$

   a) Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.
   b) Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
   c) Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 5 et 6
   d) Déterminer les valeurs propres de T_λ.
   e) L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?
   f) Justifier que T_λ est un automorphisme de E.
   g) Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
   h) Déterminer T_λ^{-1}.

Exercice 2 : ()

Cet exercice étudie ce qui s'appelle la loi de Student à n degrés de liberté.

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge, où :
$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^\alpha}$$
2. Pour u une fonction dérivable, $\alpha > 1$, donner la dérivée de $\frac{1}{u^\alpha}$.
3. En déduire à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel α supérieur ou égal à 1 , on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^{\alpha+1}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha$$
En déduire que pour tout réel α supérieur ou égal à 1 , on a :
$$J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha$$
4. Calculer J_1. Pour n entier supérieur ou égal à 1 , conjecturer la valeur de J_n, et le montrer par récurrence.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$
5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité. Exprimer k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$ (on pourra à cet effet utiliser le changement de variable $y = \frac{t}{\sqrt{n}}$).
6. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f_n. On dit alors que X suit une loi de Student à n degrés de liberté.
   a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$. Déterminer $E(X)$ dans ce cas.
   b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$. Exprimer alors $V(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n+1}{2}}$, puis vérifier que :
$$V(X) = \frac{n}{n-2}$$

Lorsque $n = 1$, la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle loi de Cauchy, et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :
$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 3 : ()

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$
Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$
Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :
$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{1}{n^\alpha}$
   a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.
   On se place désormais sous cette condition.
   b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :
   $$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$
   c) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, et en sommant la relation précédente pour k de $n+1$ à $+\infty$, que
   $$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$
   d) En déduire que :
   $$R_{1,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$
   e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?
   f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.
2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{1}{n^n}$.
   a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.
   b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3, u_k \leqslant \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:
   $$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}$$
   c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geqslant 1$:
   $$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}$$
   d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$
   $$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$
   e) La série $\sum_{n \geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?
3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
   a) Montrer que :
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$
   b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que :
   $$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$
   c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:
   $$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$
   d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:
   $$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$$

Exercice 4 : ()

Pour tous entiers naturels a et b non nuls, et pour tout entier naturel r, on considère l'expérience aléatoire ci-dessous. Une urne contient initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue dans cette urne une infinité de tirages d'une boule, en procédant de la façon suivante : après chaque tirage, on remet la boule piochée dans l'urne et **on rajoute systématiquement** r **boules blanches** avant de procéder au tirage suivant. On note dans tout le problème X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire si on obtient au moins une boule noire dans l'expérience, et qui prend la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule noire.

Première partie

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : "Lors des n premiers tirages, on n'obtient que des boules blanches."

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(A_n\right)=\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k r}{a+b+k r}$.
2. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,-\ln \left(P\left(A_n\right)\right)=\sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1+\frac{b}{a+k r}\right)$.
3. Étudier la nature de la série $\sum_{k \geqslant 0} \ln \left(1+\frac{b}{a+k r}\right)$, puis calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $P\left(A_n\right)$.
4. Démontrer alors soigneusement que $P(X=0)=0$.
   Dans toute la suite du problème, on traduira ce résultat en supposant que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
5. Écrire une fonction Python qui prend en entrée les entiers a, b et r, simule les tirages dans l'urne jusqu'à l'obtention de la première boule noire et renvoie la valeur de X obtenue.
6. Écrire alors une fonction Python qui en prend en entrée les entiers a, b et r, et une valeur de N, qui simule N réalisations de la variable aléatoire X et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
7. On suppose dans cette question que $r=0$. Donner la loi de X. Montrer que X admet une espérance et une variance, que l'on exprimera en fonction de a et b.
8. On suppose dans cette question que $a=b=r=1$.
   a) Donner la loi de X.
   b) Démontrer que X n'admet pas d'espérance.

Deuxième partie

Étude du cas $r=1$

Dans cette partie, on pose $r=1$ et on suppose que b est supérieur ou égal à 2 .

1. On suppose de plus que $a=1$.
   a) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n)=\frac{b \cdot b!}{n(n+1) \cdots(n+b)}=\frac{b \cdot(n-1)!\cdot b!}{(n+b)!}$$
   On note $\left(v_n\right)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* v_n=\frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots(n+b-1)}=\frac{n!}{(n+b-1)!}$.
   b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n P(X=n)=\frac{b \cdot b!}{b-1}\left(v_n-v_{n+1}\right)$.
   c) En déduire que X admet une espérance, et que : $E(X)=\frac{b}{b-1}$.
   On admettra que pour tout entier naturel a non nul, X admet une espérance.
2. Le réel a n'est plus supposé être égal à 1 mais seulement supérieur ou égal à 1 .
   On notera alors et uniquement dans cette question X_a la variable aléatoire X. Soit B_1 l'événement : "On obtient une boule blanche au premier tirage".
3. a) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N}^*, E\left(X_a \mid B_1\right)=1+E\left(X_{a+1}\right)$.
   b) Déterminer $E\left(X_a \mid \overline{B_1}\right)$.

c) Démontrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, E(X_a) = 1 + \frac{a}{a+b} E(X_{a+1})$$

puis que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, E(X_a) = \frac{a+b-1}{b-1}$$

Troisième partie

On revient au cas général où a, b et r sont des entiers naturels non nuls et on suppose cette fois que r est non nul. On rappelle le résultat démontré dans la première partie :

$$\forall n \geqslant 1, -\ln(P(A_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = -\ln(P(A_n)) - \frac{b}{r}\ln(n)$.

1. Démontrer que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
3. Démontrer que $P(A_n)$ est équivalent à $e^{-\ell} \cdot \frac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que $nP(X = n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{b}{r} P(A_{n-1})$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X admette une espérance.