

Barème pour l'élève :

Note finale après harmonisation :

/20

Exercice 1		
1.	/2	L est à valeurs dans \mathbb{R} ❶ L est linéaire ❶
2.	/1	$= \frac{1}{k+1} (1 - (-1)^{k+1})$
3.	/1	0 ou 1
4.	/2	<ul style="list-style-type: none"> • Dimension de l'image de L ❶ • Théorème du rang pour le noyau ❶
5.	/3	<ul style="list-style-type: none"> • $e_1 \in \text{Ker } L$ ❶ • Théorème de la base incomplète sur e_1 ❶ avec (e_1) libre ❶
6.a)	/1	Produit scalaire nul
6.b)	/2	<ul style="list-style-type: none"> • Deux sous-ev orthogonaux sont en somme directe ❶. • Somme des dimensions ❶
7.a)	/2	À valeur dans E ❶. Linéarité ❶
7.b)	/1	$= L(P)$
7.c)	/2	$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7.d)	/1	M est triangulaire donc ... (cohérence avec 7.c)
7.e)	/3	Par l'absurde si $\lambda \neq 0$ ❷ (si oublié $\neq 0$ ❶) Oui car ... si $\lambda = 0$ ❶
7.f)	/2	Injectif ($0 \notin \text{sp}(T_\lambda)$) ou autre argument) ❶ Endo. en dim. finie ❶
7.g)	/3	Calcul juste par multiplication matricielle (plus simple) ou composition d'endomorphismes ❷ On remarque que c'est $T_{\alpha+\beta}$ ❶
7.h)	/2	Utilisation de 7.g) $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$

Total Exercice 1 : /28

Exercice 2		
1.	/3	<ul style="list-style-type: none"> • Intégrante continue sur \mathbb{R}_+ ❶ • Équivalent en $+\infty$ et hypothèses théorème de comparaison ❶ • CV ssi $\alpha > 1/2$ ❶
2.	/1	$-\alpha \frac{u'}{u^{\alpha+1}}$
3.	/4	<ul style="list-style-type: none"> • Hypothèses IPP ❶ Calcul juste de l'IPP ❶ • Dédurre la relation ❷
4.	/5	<ul style="list-style-type: none"> • $J_1 = \pi/2$ ❶ • Ajouter le produit des pairs au numérateur et dénominateur ❶ • L'énoncé du calcul est juste ❷ (Si "petits points" ❶) • Mise en forme de la récurrence précise et utilisation de 3. ❶
5.	/5	<ul style="list-style-type: none"> • $g_n \geq 0$ et g_n continue presque partout ❶ • Sous réserve de convergence, l'intégrale I_n de g_n sur \mathbb{R} est le double de celle sur \mathbb{R}_+ par parité ❶ donc finie car $(n+1)/2 > 1$ et on pose $k_n = I_n$ ❶ • Changement de variable juste ❶ • $k_n = 2\sqrt{n}J_{(n+1)/2}$ ❶
6.a)	/4	<ul style="list-style-type: none"> • X admet une espérance ssi convergence absolue ❶ • Cv ssi $n > 1$ bien justifiée ❷ (Si manque un argument ❶) • $E(X) = 0$ par imparité de l'intégrante ❶
6.b)	/6	<ul style="list-style-type: none"> • X admet une variance ssi admet un moment d'ordre 2 ❶ • X admet un moment d'ordre 2 ssi $(n > 2)$ bien justifié ❷ (Si manque un argument ❶) • Expression juste du moment d'ordre 2 par le quotient ❶ $E(X^2) = \frac{2n\sqrt{n}}{k_n} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy$ <ul style="list-style-type: none"> • Utilisation de 3. pour le calcul du quotient ❶ • Koenig-Huygens en cohérence avec 6.a) ❶

Total Exercice 2 : /28

Exercice 3		
1.a)	/1	Critère de Riemann, $\alpha > 1$
1.b)	/1	Justifications attendues
1.c)	/2	
1.d)	/1	
1.e)	/1	
1.f)	/2	$[\alpha]$ Si $\alpha \notin \mathbb{N}^*$, sinon $\alpha - 1$. Si pas de distinction ❶. Pas besoin de justifier
2.a)	/2	
2.b)	/2	
2.c)	/1	
2.d)	/3	Récurrance sur $p \in \mathbb{N}^*$. • Initialisation et mise en place de la récurrence ❶ • Hérité ❷ (si $\forall p$ dans l'hérité 0)
2.e)	/2	Oui, positive ❶ et majorée par une série géom. de raison $\frac{1}{6}$ ❶
3.a)	/2	• Encadrement $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ ❶ • Justification de croissance de l'intégrale ❶ (Non pénalité si pas "bornes dans l'ordre croissant")
3.b)	/2	Si pas de justification "raison $\neq 1$ " dans la somme géométrique ❶
3.c)	/2	Convergence par limite de la suite des sommes partielles ❶ Calcul du reste ❶
3.d)	/3	• Initialisation et mise en place de la récurrence ❶ • Hérité ❷

Total Exercice 3 : /27

Exercice 4 Partie I		
1.	/2	Citation de la formule des probabilités composées
2.	/1	
3.	/3	Critère d'équivalence si $r > 0$ ❶ Si $r = 0$ ❶ Limites de $P(A_n)$ ❶
4.	/2	• Expression de $[X = 0]$ comme intersection des A_n ❶ • Thm. lim. monotone et Hypothèse décroissance des $(A_n)_n$ ❶
5.	/4	• Boucle while contrôlant la probabilité d'avoir boule noire ❷ • Condition valide de la boucle ❶ Initialisation du compteur ❶
6.	/3	Si le range de la boucle for inexact ❷
7.	/2	Loi $\mathcal{G}((b/(a+b)))$ ❶ Espérance et variance en cohérence ❶
8.a)	/3	$[X = n] = A_{n-1} \cap B_n$ ❶ $P(X = n) = 1/(n(n+1))$ ❷
8.b)	/1	Cohérence résultat précédent

Total Exercice 4 Partie I : /21

Exercice 4 Partie II		
1.a)	/2	• $P(X = n) = \frac{b}{n+b} \cdot \prod_{k=0}^{n-2} \frac{1+k}{1+b+k}$ ❶ • Simplifications justifiées ❶
1.b)	/2	
1.c)	/2	Comparaison suite/série ❶ Calcul de l'espérance ❶
2.	0/0	Erreur d'énoncé pas de question 2.
3.a)	/3	• Justification $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{B_1}(X_a = n) = P(X_{a+1} = n - 1)$ ❷ • Calcul de l'espérance conditionnelle ❶
3.b)	/1	Loi conditionnelle presque sûrement certaine
3.c)	/2	• Espérance totale sur le SCE $(B_1, \overline{B_1})$ et 3.a) ❶ • Récurrence sur $a \in \mathbb{N}^*$, hérité ❶ pas de pt. init. mise en place

Total Exercice 4 Partie II : /12

Exercice 4 Partie III		
1.	/2	$o(1/n^{3/2})$ ou équivalent juste ❷. Si équivalent "presque juste" ❶
2.	/1	Comparaison suite série
3.	/2	• Limite $P(A_n)n^{b/r} = e^{-l}$ ❶ (Pas de sanction si non mention de la continuité de exp) • équivalent ❶
4.	/2	Si pas la justification $b \neq 0$ ❶
5.	/2	Pas de sanction si justification rapide

Total Exercice 4 Partie III : /9

Total Exercice 4 : /42

Total du Sujet : /125